



## 제 16 회 아시아-태평양 수학올림피아드

2004년 3월 16일

- ♠ 주의 : 시험 후, APMO 홈페이지에 문제가 공식적으로 공시되기 전까지  
절대로 인터넷 등을 통해 문제를 공개하지 말아 주십시오.  
♡ 제한 시간 4시간 ; 계산기 사용금지 ; 문항당 7점 ♡

1.  $S$ 는 양의 정수의 집합으로 공집합이 아니고 유한한 집합이다. 다음 조건을 만족시키는 집합  $S$ 를 모두 구하십시오.

조건 :  $S$ 의 모든 원소  $i, j$ 에 대하여  $\frac{i+j}{(i, j)}$ 는 항상  $S$ 의 원소이다.

여기서  $(i, j)$ 는  $i$ 와  $j$ 의 최대공약수이다.

2. 예각 삼각형  $ABC$ 의 외심을  $O$ , 수심을  $H$ 라고 하자. 삼각형  $AOH, BOH, COH$  중 어떤 한 삼각형의 넓이는 다른 두 삼각형의 넓이의 합과 같음을 증명하십시오.

3. 평면 위에, 어느 세 점도 동일 직선 위에 있지 않은 2004개의 점으로 이루어진 집합  $S$ 를 생각하자. 이 집합  $S$ 의 서로 다른 두 점을 지나는 모든 직선의 집합을  $\mathcal{L}$ 이라 하자. 다음 조건을 만족시키도록 두 가지 이하의 색 만으로  $S$ 의 각 점을 칠할 수 있음을 증명하십시오.

조건 :  $S$ 의 임의의 두 점  $p, q$ 에 대하여  $p$ 와  $q$  사이를 가르는  $\mathcal{L}$ 의 직선들의 개수가 홀수일 필요충분조건은  $p$ 와  $q$ 가 같은 색인 것이다.

여기서 직선  $l$ 이 두 점  $p, q$ 를 가른다면 두 점  $p, q$ 의 어느 한 점도  $l$  위에 있지 않고,  $l$ 에 대하여 서로 반대쪽에 있다는 뜻이다.

4. 실수  $x$ 에 대하여  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대의 정수이다. 임의의 양의 정수  $n$ 에 대하여 다음 값이 짝수임을 보이시오.

$$\left[ \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right]$$

5. 모든 실수  $a, b, c > 0$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 증명하십시오.

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$