



XVII Asian Pacific Mathematics Olympiad

- * 제한시간: 4 시간
- * 문항당 7점

* APMO 홈페이지에 문제가 공개되기 전에는 문제를 인터넷 등에 공개하지 말아 주십시오. 인터넷 상에서 문제에 대한 논의를 하는 것도 삼가해 주시기 바랍니다. 그리고, 시험시간 중에는 계산기를 사용할 수 없습니다.

Problem 1. 임의의 무리수 a 에 대하여 다음의 조건을 만족시키는 무리수 b 와 b' 이 존재함을 보여라. [조건] $a + b$ 와 ab' 은 유리수이고, ab 와 $a + b'$ 은 무리수이다.

Problem 2. 등식 $abc = 8$ 을 만족시키는 양의 실수 a, b, c 에 대하여 다음을 증명하여라.

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

Problem 3. 서로 합동인 2005 개의 삼각형으로 분할될 수 있는 삼각형이 존재함을 보여라.

Problem 4. 어떤 마을에 n^2 개의 집이 $n \times n$ 바둑판 모양을 이루고 있다. 위에서 i 번째, 왼쪽에서 j 번째 집을 (i, j) 라 하자. ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$). 예를 들어, $(1, 1)$ 은 맨 윗줄 왼쪽 첫 집이다. 시간 $t = 0$ 인 시점에 집 $(1, c)$ 에서 화재가 발생하였다. 단, $c \leq \frac{n}{2}$. 이후 매 시간대 $[t, t+1]$ 동안, 시간 t 인 시점에 이미 불이 붙은 집들로부터 그 집들과 이웃한 모든 집들로 불이 번지는데, 소방수들은 이 시간 동안 이웃한 집들중 한 집만을 택하여 불이 번지지 않도록 방어한다. 소방수들이 한번 방어한 집은 끝까지 불이 옮겨붙지 않으며, 진화작업은 더 이상 불이 번질 곳이 없을 때 끝난다. 소방수들은 최대 몇 집까지 화재로부터 지켜낼 수 있는가? 두 집 (i, j) 와 (k, ℓ) 에 대하여, $|i - k| + |j - \ell| = 1$ 일 때, 이 두 집을 서로 이웃한 집이라 한다.

Problem 5. 삼각형 ABC 에 대하여, 점 M 과 N 은 각각 변 AB 와 AC 위에 놓여 있고, $MB = BC = CN$ 을 만족시킨다. 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름을 R , 내접원의 반지름을 r 이라 할 때, MN/BC 을 R 과 r 로 나타내어라.