XIX Asian Pacific Mathematics Olympiad

March 13, 2007

제한시간: 4 시간 *문항당 7 점*

∗ APMO 공식 홈페이지에 문제가 게시되기 전까지는 문제에 대한 보안을 철저히 지켜주시기 바랍니다. 인터넷에 문제를 공개하거나, 인터넷 상에서 문제에 대한 논의를 하는 것도 삼가해 주시기 바랍니다. 그리고 시험시간 중에는 계산기를 사용할 수 없습니다.

Problem 1. 집합 S 는 3 보다 큰 소수를 약수로 가지지 않는 9 개의 서로 다른 정수들로 이루어져 있다. 이때, 집합 S 는 항상 다음의 조건을 만족하는 3 개의 서로 다른 정수를 원소로 가지고 있음을 보여라: (조건) 세 정수의 곱은 완전 세 제곱수이다.

Problem 2. 삼각형 ABC 는 예각삼각형으로 $\angle BAC = 60^\circ$ 이고 $AB > AC$ 이다. 삼각형 ABC 의 내심을 I, 수심을 H 라 할 때, $2\angle AHI = 3\angle ABC$ 임을 보여라.

Problem 3. 평면 상에 다음과 같이 배열된 n 개의 원판 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 을 생각하자: 각 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ 에 대하여 C_i 의 중심은 C_{i+1} 의 원주 위에 있고, 끝으로 C_n 의 중심은 C_1 의 원주 위에 있다. 이러한 원판 n 개의 배열에 대하여, $C_j \subsetneq C_i$ 를 만족하는 순서쌍 (i, j) 의 개수를 그 배열의 *점수*라고 정의하자. 이때, 위와 같은 원판 n 개의 배열이 취할 수 있는 점수의 최대값을 구하여라.

Problem 4. 조건 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ 을 만족하는 양의 실수 x, y, z 에 대하여, 다음의 부등식을 증명하여라:

$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2 + xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1.$$

Problem 5. 5×5-체스판 모양의 전구판을 생각하자. 25 개의 전구가 각 칸에 놓여 있고 전구마다 스위치가 있다. 전구판이 고장이 나서, 한 전구의 스위치를 누르면, 그 전구의 상태가 바뀔 뿐만 아니라, 같은 행, 같은 열에 있는 이웃 전구들의 상태도 같이 바뀐다. 다른 전구들의 상태는 바뀌지 않는다. 상태가 바뀐다는 것은 켜져 있던 전구는 꺼지고, 꺼져 있던 전구는 켜진다는 의미이다. 처음엔 모든 전구가 꺼져 있다고 가정하자. 이제 스위치를 유한 번 눌러서 단 한 개의 전구만 켜진 상태로 만들려고 한다. 이러한 전구의 (즉, 유일하게 켜진 전구의) 가능한 위치를 모두 구하여라.