XX Asian Pacific Mathematics Olympiad

APMO

March 11, 2008

∗ *제한시간 4 시간; 문항당 7 점* ∗

∗ *APMO 공식 홈페이지에 문제가 게시되기 전까지는 문제에 대한 보안을 철저하게 지켜주십시오. 인터넷에 문제를 공개하거나 인터넷상에서 문제에 대한 논의를 하는 것도 삼가해 주시기 바랍니다. 시험시간에 자와 컴퍼스는 사용할 수 있지만 계산기는 사용할 수 없습니다.*

문제 1. 평면 위에 놓인 $\angle A < 60^\circ$ 인 삼각형 ABC 를 생각하자. 점 X 와 Y 는 각각 변 AB 와 AC 위의 점으로 $CA+AX = CB+BX$ 와 $BA+AY = BC+CY$ 를 만족시킨다. 점 P 는 평면상의 점으로 직선 PX 와 PY 가 각각 변 AB 와 AC 에 수직이다. 이때, $\angle BPC < 120^\circ$ 임을 증명하여라.

문제 2. 어떤 학급의 학생들이 학급 내에 동아리들을 만든다고 하자. 각 동아리는 정확히 3 명의 멤버로 구성되고, 임의의 서로 다른 두 동아리는 많아야 1 명의 멤버를 공유한다. 이 학급의 학생 수가 46 명일 때, 다음의 조건을 만족시키는 이 학급의 학생 10 명으로 이루어진 집합이 항상 존재함을 증명하여라.

[조건] 어떤 동아리도 이 집합에 온전히 포함되지 않는다.

문제 3. 어떤 삼각형 ABC 의 외접원을 Γ 라 하자. 두 꼭지점 A, C 를 지나는 원이 변 BC 와 BA 를 만나는 점을 각각 D 와 E 라고 하자. 직선 AD 와 CE 가 원 Γ 와 만나는 또다른 점을 각각 G 와 H 라 하자. 점 A 와 C 에서 Γ 에 접하는 접선이 직선 DE 와 만나는 점을 각각 L 과 M 이라 하자. 이때, 두 직선 LH 와 MG 가 원 Γ 에서 만남을 증명하여라.

문제 4. 아래와 같이 정의된 함수 $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ 를 생각하자. 단, $\mathbb{N}_0$ 는 음 아닌 정수 전체의 집합이다.

$$\text{(i) } f(0) = 0\,; \text{ (ii) } f(2n) = 2f(n)\,; \text{ (iii) } f(2n+1) = n + 2f(n) \text{ for all } n \geq 0.$$

(a) 다음의 세 집합을 구하여라.
$L := \{ n \,|\, f(n) < f(n+1) \}, \;\; E := \{ n \,|\, f(n) = f(n+1) \}, \;\; G := \{ n \,|\, f(n) > f(n+1) \}.$

(b) 임의의 $k \geq 0$ 에 대하여 $a_k := \max\{f(n) : 0 \leq n \leq 2^k\}$ 를 k 에 대한 식으로 나타내어라.

문제 5. 정수 a, b, c 가 조건 $0 < a < c-1$, $1 < b < c$ 를 만족시킨다고 하자. 임의의 $0 \leq k \leq a$ 인 k 에 대하여, kb 를 c 로 나눈 나머지를 r_k 라 하자. (그러므로 $0 \leq r_k < c$.) 이때, 두 집합 $\{r_0, r_1, r_2, \ldots, r_a\}$ 와 $\{0, 1, 2, \ldots, a\}$ 가 같을 수 없음을 증명하여라.