

XXI Asian Pacific Mathematics Olympiad



March, 2009

* 제한시간 4 시간; 문항당 7 점 *

* APMO 공식 홈페이지(<http://www.kms.or.kr/Competitions/APMO>)에 문제가 게시되기 전까지는 문제에 대한 보안을 철저하게 지켜주십시오. 인터넷에 문제를 공개하거나 인터넷상에서 문제에 대한 논의를 하는 것 등, 문제를 응시자 이외의 사람에게 유출하는 일체의 행위를 삼가해 주십시오. 시험 시간에 자와 컴퓨터는 사용할 수 있지만 각도기나 계산기는 사용할 수 없습니다.

문제 1. 칠판에 적힌 양의 실수들에 대한 다음의 ‘작업’을 생각하자: ‘칠판 위에 적힌 숫자들 중 하나를 선택하여(선택된 수를 r 이라 하자), 그 수를 지우고, 대신 $2r^2 = ab$ 를 만족시키는 두 양의 실수 a, b 를 칠판에 적는다.’

칠판에 적힌 숫자가 r 하나 뿐인 상태에서 위의 작업을 $k^2 - 1$ 번 시행하였다고 할 때, 칠판에 적힌 k^2 개의 숫자들 중에는 kr 보다 크지 않은 숫자가 존재함을 보여라. (단, k^2 개의 숫자들이 다 다를 필요는 없다.)

문제 2. 실수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 가 다음의 방정식들을 만족시킨다고 하자: 각 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여

$$\frac{a_1}{k^2 + 1} + \frac{a_2}{k^2 + 2} + \frac{a_3}{k^2 + 3} + \frac{a_4}{k^2 + 4} + \frac{a_5}{k^2 + 5} = \frac{1}{k^2}.$$

이때 $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$ 의 값을 구하여라. (단, 하나의 분수로 그 값을 구할 것.)

문제 3. 서로 바깥에 있는 평면 위의 세 원 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 을 생각하자. 세 원 모두의 바깥에 있는 평면 위의 한 점 P 에 대하여 여섯 개의 점 $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ 은 다음의 조건을 만족시키는 점들이다: 각 $i = 1, 2, 3$ 에 대하여, 점 A_i 와 B_i 는 원 Γ_i 위의 서로 다른 점이고, 직선 PA_i 와 PB_i 는 원 Γ_i 에 접한다. 여기서, 세 직선 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 이 한 점에서 만날 경우 점 P 를 ‘정점’이라고 부르자. 이러한 정점들은, 존재한다면, 모두 한 원 위에 있음을 보여라.

문제 4. 임의로 주어진 양의 정수 k 에 대하여, 아래 두 조건을 만족시키는 유리수 등차수열

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}$$

가 존재함을 보여라: (i) 각 $i = 1, 2, \dots, k$ 에 대하여 a_i 와 b_i 는 서로 소인 양의 정수이고, (ii) $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ 는 모두 서로 다르다.

문제 5. 준엽과 잔디는 평면 위의 A 지점에서 B 지점으로 자동차를 타고 이동하려고 하는데 자동차에는 운전대가 둘이 있어서 각자 하나씩 잡고 다음의 규칙에 따라 운전한다: 출발 후, 준엽은 매 ℓ 킬로미터 마다 좌회전을 하고 잔디는 매 r 킬로미터 마다 우회전을 한다. 그러나 준엽과 잔디가 동시에 각각 좌회전과 우회전을 해야 하는 경우에는 그냥 직진하기로 한다. 단, ℓ 과 r 은 서로 소인 양의 정수이고, 자동차는 평면 위에서 어디든 갈 수 있으며, 출발 후나 좌회전 또는 우회전 후에 항상 직진한다고 가정한다.

자동차가 A 지점에서 B 지점을 향해 출발한다고 할 때, 두 지점 사이의 거리에 관계없이 준엽과 잔디가 운전하는 자동차가 B 지점에 도착하게 되는 정수 쌍 (ℓ, r) 을 모두 구하여라.