XXIII Asian Pacific Mathematics Olympiad

APMO

March 8, 2011

∗ 제한시간 4 시간 ; 문항당 7 점

∗ APMO 공식 홈페이지(http://www.mmjp.or.jp/competitions/APMO)에 문제가 게시되기 전까지는 문제에 대한 보안을 철저하게 지켜주십시오. 그 전에 인터넷에 문제를 공개하거나 인터넷상에서 문제에 대한 논의를 하는 것 등, 문제를 응시자 이외의 사람에게 유출하는 일체의 행위를 금합니다. 시험 중에 자와 컴퍼스는 사용할 수 있지만 각도기나 계산기는 사용할 수 없습니다.

문제 1. 양의 정수 a, b, c 에 대하여, 세 개의 정수 a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b 가 모두 완전제곱수일 수는 없음을 보여라.

문제 2. 평면 위에 다섯 개의 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 가 있고, 이 중 어떤 세 점도 일직선 위에 있지 않다. 서로 다른 $i, j, k \in \{1,2,3,4,5\}$ 에 대하여, $\angle A_iA_jA_k$ 의 최솟값이 취할 수 있는 가장 큰 값을 구하여라.

문제 3. $\angle BAC = 30°$ 인 예각삼각형 ABC 에서, $\angle ABC$ 의 내각과 외각의 이등분선이 직선 AC 와 만나는 점을 각각 B_1, B_2 라고 하고, $\angle ACB$ 의 내각과 외각의 이등분선이 직선 AB 와 만나는 점을 각각 C_1, C_2 라 하자. 선분 B_1B_2 와 C_1C_2 를 각각 지름으로 하는 두 원의 교점이 삼각형 ABC 의 내부의 점 P 에서 만난다고 가정할 때, $\angle BPC = 90°$ 임을 보여라.

문제 4. 주어진 홀수인 양의 정수 n 에 대하여, 다음의 세 조건을 모두 만족하는 $m+2$ 개의 서로 다른 점 $P_0, P_1, \ldots, P_{m+1}$ 이 좌표평면 위에 존재한다고 할 때, m 이 취할 수 있는 가장 큰 값을 구하여라. (단, m 은 음 아닌 정수이다.)

(1) $P_0 = (0,1)$, $P_{m+1} = (n+1, n)$ 이고, 모든 $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ 에 대하여 P_i 의 x-좌표와 y-좌표는 1 이상 n 이하의 정수이다.

(2) 모든 $i \in \{0,1,2,\ldots,m\}$ 에 대하여, 선분 P_iP_{i+1} 은 i 가 짝수이면 x-축과 평행하고, i 가 홀수이면 y-축과 평행하다.

(3) $0 \le i < j \le m$ 인 i, j 에 대하여, 선분 P_iP_{i+1} 과 P_jP_{j+1} 은 많아야 한 점을 공유한다.

문제 5. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에 대하여, 다음의 두 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 를 모두 구하여라.

(1) 모든 실수 x 에 대하여, $f(x) < M$ 을 만족시키는 실수 M 이 존재한다.

(2) 모든 실수 x, y 에 대하여, $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$ 가 성립한다.