

2020년 9월 12일 ; 제한시간 3시간

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
B. 이 시험은 총 25개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
C. 문제 1~7번은 각 3점, 문제 8~18번은 각 4점, 문제 19~25번은 각 5점입니다.

1. <정답. 10>

삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 $\angle B = 40^\circ$ 이다. 변 BC 위의 점 D 를 $\angle ADC = 120^\circ$ 가 되도록 잡고, 각 C 의 이등분선과 변 AB 의 교점을 E 라 하자. $\angle DEC$ 는 몇 도인가?

2. <정답. 158>

실수 계수 9차다항식 $P(x)$ 가 $k = 1, 2, \dots, 10$ 에 대하여 $P(k) = \frac{(k+1)^2}{k}$ 를 만족할 때, $12P(12)$ 의 값을 구하여라.

3. <정답. 300>

직사각형 $ABCD$ 에서 $\overline{AB} = 20, \overline{BC} = 10$ 이다. 점 P 는 변 AB 위의 점으로 $\overline{PD} = 20$ 인 점이다. 선분 CP 를 따라 사각형 $ABCD$ 를 접었더니 점 B 와 이 사각형의 내부의 점 Q 가 일치했다. 이때 \overline{DQ}^2 의 값을 구하여라.

4. <정답. 151>

양의 정수 n 에 대하여 \sqrt{n} 에 가장 가까운 정수를 a_n 이라 하자. 다음 등식을 만족하는 양의 정수 m 을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{m(m+1)} a_k = 101m(m+1)$$

5. <정답. 144>

한자리 수 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 원형으로 배열할 때, 이웃한 두 수의 곱이 모두 짝수가 되도록 배열하는 경우의 수는?

6. <정답. 21>

수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족한다.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

a_{96} 을 43으로 나눈 나머지를 구하여라.

7. <정답. 90>

직사각형 $ABCD$ 에서 $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 3$ 이다. 변 CD 위의 점 E 를 $\overline{BA} = \overline{BE}$ 가 되도록 잡자. 삼각형 ABE 의 내접원의 반지름을 $a + b\sqrt{10}$ 이라 할 때, $60(a + b)$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

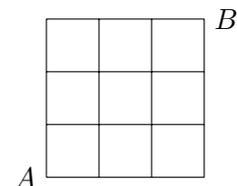
8. <정답. 48>

다음을 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (m, n) 에 대하여 mn 의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{mn}{m+n} \text{ 과 } \frac{m^2 + n^2 + mn}{m+n} \text{ 은 서로 다른 홀수인 소수}$$

9. <정답. 224>

다음 그림에서 갑은 A 에서 출발해서 오른쪽 혹은 위쪽으로 1칸씩 이동하면서 B 에 도착하고, 을은 B 에서 출발해서 왼쪽 혹은 아래쪽으로 1칸씩 이동하면서 A 에 도착한다. 갑과 을은 각각 등속력으로 움직이고, 갑의 속력은 을의 2배이다. 갑과 을이 동시에 출발해서 도착하는 총 400가지의 경우 중, 서로 만나지 않고 이동하는 경우의 수를 구하여라.



10. <정답. 20>

집합 $A = \{(x, y) \mid (x-1)(x-9) \leq y \leq 2x, x, y \text{는 실수}\}$ 에 속하는 점 $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2), R = (r_1, r_2)$ 에 대하여 $\frac{p_2 + q_2 + r_2}{p_1 + q_1 + r_1}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M^2 + m^2$ 의 값을 구하여라.

11. <정답. 450>

원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 의 대각선 AC 와 BD 가 점 E 에서 만난다. $\angle ABD = 5^\circ$, $\angle AED = \angle BCD = 50^\circ$, $\overline{BD} = 30$ 일 때, 사각형 $ABCD$ 의 넓이를 구하여라.

12. <정답. 471>

식 $(2x - y)^3 + (2x + 3y)^3$ 의 값이 소수 941의 배수가 되도록 하는 양의 정수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 최솟값을 구하여라.

13. <정답. 592>

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

- (1) 모든 $n \in \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ 은 짝수이다.
- (2) $f(1) + f(2) + f(3)$ 과 $f(1) + f(2) + \dots + f(6)$ 은 모두 3의 배수가 아니다.

14. <정답. 4>

0이 아닌 실수 x, y, z 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

$$x^2 + 3y^2 + 3xy + yz + 2zx = 0$$

$$2x^2 + 3xy + 2yz + zx = 0$$

식 $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$ 의 값 중 가장 큰 것을 M , 가장 작은 것을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

15. <정답. 84>

삼각형 ABC 의 변 BC 의 중점을 M 이라 하자. M 을 중심으로 하고 점 A 를 지나는 원이 변 AC 와 만나는 점을 $D(\neq A)$ 라 하자. $\overline{AM} = \overline{AD} = 5$, $\overline{CD} = 3$ 일 때, \overline{AB}^2 의 값을 구하여라.

16. <정답. 138>

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.

- (1) $a \in \{1, 2, \dots, 12\}$, $b \in \{1, 2, \dots, 12\}$
- (2) $an + b$ 와 $12n + 6$ 이 서로소가 아닌 양의 정수 n 이 존재한다.

17. <정답. 37>

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일 대응 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라.

(조건) $f(x) > x$ 인 x 의 개수가 $f(x) < x$ 인 x 의 개수보다 크다.

18. <정답. 406>

양의 정수의 집합 \mathbb{N} 에서 정의된 함수 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 이 모든 양의 정수 n 에 대하여 $f(f(n)) = n + 2$ 를 만족한다. $f(201)$ 의 값이 될 수 있는 모든 양의 정수의 합을 구하여라.

19. <정답. 52>

삼각형 ABC 의 외심 O 와 점 A 는 직선 BC 에 대하여 대칭이다. 변 BC 위에 $\overline{BD} = 2, \overline{CD} = 4$ 인 점 D 가 있다. 선분 DO 의 연장선 위의 점으로 $\overline{OX} = 4$ 인 점 X 에 대하여 (O 는 X 와 D 사이에 있음) 삼각형 ADX 의 외접원이 직선 BC 와 만나는 점을 $Y(\neq D)$ 라 하자. \overline{AY}^2 의 값을 구하여라.

20. <정답. 18>

양의 실수 x 는 $x + \frac{1}{x}$ 이 정수가 되는 실수이다. 모든 양의 정수 n 에 대하여 $a_n = x^n + x^{-n}$ 으로 정의할 때,

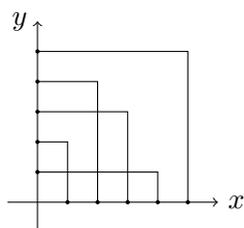
$$a_{13} + a_9 = 3 \times 7 \times 43 \times 307$$

$$a_{13} - a_9 = 3 \times 5 \times 89 \times 199$$

이다. a_3 을 구하여라.

21. <정답. 15>

x 축 위의 5개의 점 $(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)$ 과 y 축 위의 5개의 점 $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5)$ 을 7자 모양의 꺾은선 5개로 연결한 것을 **맞대응**이라고 하자. 다음 그림은 이러한 맞대응의 예이고, 이 경우 꺾은선끼리 만나는 점의 개수는 4이다.



이때 총 120가지의 맞대응 중, 꺾은선끼리 만나는 점의 개수가 3인 것의 개수를 구하여라.

22. <정답. 28>

양의 실수 a, b, c, d 가 $a \geq b \geq c$ 와 $4(a+b) \leq 9(c+d)$ 를 모두 만족할 때, $36 \left(\frac{c}{a} + \frac{d}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

23. <정답. 405>

삼각형 ABC 에서 $\angle A = 90^\circ$ 이다. 변 AB 를 지름으로 하는 원 Ω 가 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하고, D 에서의 Ω 의 접선과 변 AC 의 교점을 E 라 하자. $\overline{CD} = 4, \overline{DE} = 3$ 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 k 라 하자. k^2 의 값을 구하여라.

24. <정답. 201>

다음 등식을 만족하는 양의 정수 m 중 가장 작은 것을 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대정수)

$$\sum_{k=0}^m \left(\left[\frac{m+k+2}{2k+1} \right] - \left[\frac{m+k+1}{2k+1} \right] \right) = 9$$

25. <정답. 16>

양의 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 에서 하나의 수가 다른 두 수의 곱으로 표현될 때, 이를 **곱순서쌍**이라고 하자. 예를 들어, $(1, 1, 1), (6, 2, 3), (2, 8, 4), (5, 5, 25)$ 는 모두 곱순서쌍이다. 집합 $X = \{1, 2, \dots, 14\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일대응 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라.

(조건) $a, b, c \in X$ 에 대하여, (a, b, c) 가 곱순서쌍이면 $(f(a), f(b), f(c))$ 도 곱순서쌍이다.