

2021년 6월 12일; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.  
 B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

1. 방정식  $x^3 - 8x^2 + 16x - 6 = 0$ 의 서로 다른 세 실근을  $a, b, c$ 라 할 때,

$$6 \left( \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \right)$$

의 값을 구하여라.

**답: 464**

2. 최고차항의 계수가 1인 이차다항식  $p(x)$ 가  $p(1) = 1$ 을 만족한다. 다음 식이 가질 수 있는 모든 값들의 합을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{101} \left( (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \right) p(n)$$

(단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

**답: 101**

3. 함수  $f(x) = x^2 + x - q$  ( $q > 1$ )에 대하여 부등식

$$a < f(a) < f(f(a))$$

가 성립하지 않는  $a$ 의 값 중 가장 작은 것을  $m$ , 가장 큰 것을  $M$ 이라 하자.  $M - m = 11$ 일 때,  $q$ 의 값을 구하여라.

**답: 25**

4. 좌표평면의 원점  $O$ 와 포물선  $y = x^2$  위의 서로 다른 세 점  $A, B, C$ 가 다음 네 조건을 모두 만족할 때, 사각형  $OABC$ 의 넓이를 구하여라.

(i) 점  $A$ 의  $x$ 좌표는 0보다 작다.

(ii)  $\angle OAB = 90^\circ$

(iii) 직선  $AC$ 는  $x$ 축과 평행하다.

(iv) 선분  $OB$ 의 중점의  $x$ 좌표와 점  $C$ 의  $x$ 좌표는 같다.

**답: 4**

5. 삼각형  $ABC$ 에서  $\angle BAC = 60^\circ$ 이다. 점  $P$ 는 변  $BC$  위의 점으로 삼각형  $ABP$ 의 외접원  $O_1$ 과 삼각형  $ACP$ 의 외접원  $O_2$ 의 반지름이 각각 48과 32이다.  $\sin \angle ACB = \alpha$ 라 할 때,  $560\alpha^2$ 의 값을 구하여라.

**답: 540**

6. 함수  $f(x)$ 가 0과 1을 제외한 모든 실수  $x$ 에 대하여 등식

$$2(x-1)^4 f\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2x^4 f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 5 + 3f(x)$$

를 만족한다.  $f(2)$ 를 구하여라.

**답: 35**

7. 양의 정수  $m$ 에 대하여  $3^k$ 이  $m$ 의 약수가 되는 가장 큰 정수  $k$ 를  $v(m)$ 이라 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수를 구하여라.

(i)  $1 \leq a, b \leq 100$

(ii)  $v(a^3 + b^3) - 3 = v(a + b) \geq 2$

**답: 242**

8. 다음 세 조건을 모두 만족하는 집합의 순서쌍  $(A, B, C, D)$ 의 개수를 구하여라.

- (i)  $A \subset B \cap C$
- (ii)  $B \cup C \subset D \subset \{1, 2, 3, 4\}$
- (iii)  $C \neq \emptyset$

**답: 1215**

9. 1부터 100까지 양의 정수를 모두 더하는데  $k$ 개의 홀수를 제외하고 더하였더니 그 값이 3775가 나왔다. 가능한 양의 정수  $k$ 는 모두 몇 개인가?

**답: 11**

10. 세 문자  $A, B, C$ 를 사용하여 만든 6자리 문자열  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$  중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(조건)  $x_i = A, x_j = B, x_k = C$ 를 만족하는  $1 \leq i < j < k \leq 6$ 인 양의 정수  $i, j, k$ 는 존재하지 않는다.

**답: 496**

11. 양의 정수  $n$ 에 대하여  $p_n(x) = \frac{n}{64}x^2 - \frac{n}{32}x + 2$ 이고  $T_n = \{x \mid p_n(p_n(x)) \leq 2, x \text{는 실수}\}$ 이다. 다음 조건을 만족하는  $n$ 의 개수를 구하여라.

(조건) 모든 양의 정수  $m$ 에 대하여  $T_m \subset T_n$ 이다.

**답: 128**

12. 수열  $\{x_n\}$ 이 다음을 만족한다.

$$x_1 = 1, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^k x_i x_j = 1 - 4 \sum_{i=1}^{k+1} x_i \quad (k \geq 1)$$

모든 양의 정수  $n$ 에 대하여

$$N|x_{n+2}| \leq |x_{n+1}|$$

이 성립하는 양의 정수  $N$ 의 최댓값을 구하여라.

**답: 17**

13. 삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{AB} > \overline{AC}$ 이다. 각  $A$ 의 이등분선이 변  $BC$ 와 만나는 점을  $D$ , 변  $BC$ 의 중점을  $M$ , 점  $C$ 에서 직선  $AD$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하자.  $\overline{MD} = 10, \overline{MH} = 20$ 일 때,  $(\overline{AM})^2 - (\overline{AD})^2$ 의 값을 구하여라.

**답: 700**

14. 한 변의 길이가 3인 정삼각형  $ABC$ 의 꼭짓점  $A$ 를 중심으로 하고 점  $B$ 를 지나는 원이 직선  $AB$ 와 만나는 점을  $D( \neq B)$ 라 하자. 변  $CA$  위의 점  $E$ 에 대하여 직선  $DE$ 와 변  $BC$ 가 만나는 점을  $F$ 라 할 때, 삼각형  $AED$ 의 넓이와 삼각형  $CEF$ 의 넓이가 같다. 삼각형  $BFE$ 의 넓이를  $a$ 라 할 때,  $32a^2$ 의 값을 구하여라.

**답: 54**

15. 원  $O$ 에 내접하는 육각형  $ABCDEF$ 가 있다. 선분  $AD$ 가 원  $O$ 의 지름이고 사각형  $BCEF$ 는 직사각형이다.  $\overline{AC} = 5, \overline{CE} = 6, \overline{EA} = 4$ 일 때, 육각형  $ABCDEF$ 의 여섯 개의 변의 길이의 합을  $K$ 라 하자.  $7K^2$ 의 값을 구하여라.

**답: 2116**

16. 서로소인 양의 정수  $p, q$ 에 대하여

$$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12}}{7\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{2}}$$

일 때,  $p + q$ 를 구하여라.

답: 10

17. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수를 구하여라.

(i)  $1 \leq a, b, c \leq 115$

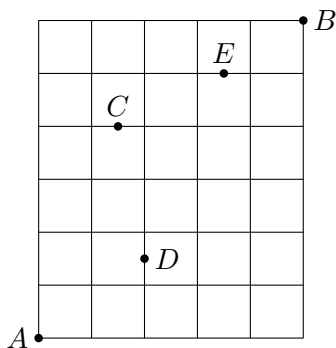
(ii) 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $115^{115n+a} - 1$ 은  $115^{bn+c} - 1$ 의 배수이다.

답: 144

18. 실수가 아닌 복소수  $p$ 가 이차방정식  $x^2 - ax + b = 0$  ( $a, b$ 는 실수)의 해이다.  $p^5 = 32$ 일 때,  $(a + 1)^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

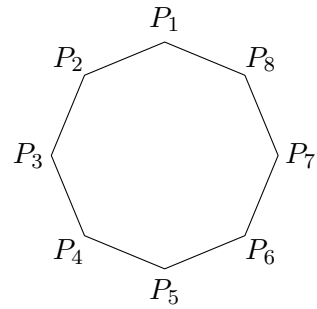
답: 21

19. 다음 그림에서 점  $A$ 에서 출발해서 오른쪽 혹은 위쪽으로 1칸씩 이동하면서  $B$ 에 도착한다. 점  $C, D, E$  중 정확히 하나만 지나면서  $A$ 에서  $B$ 로 이동하는 경우의 수를 구하여라.



답: 179

20. 정팔각형  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 이 있다.

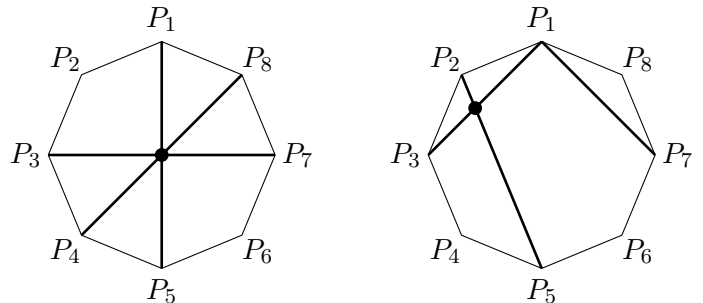


서로 다른 3개의 대각선을 선택하는 방법 중 다음 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(i) 3개의 대각선은 한점에서 만나지 않는다.

(ii) 3개의 대각선으로 만들어지는 교점 중, 정팔각형의 내부에 있는 것의 개수는 1이다.

예를 들어, 아래 왼쪽 그림은 조건(i)을 만족하지 않고 오른쪽 그림은 두 조건을 모두 만족한다.



답: 448