

2020년 11월 21일; 제한시간 4시간; 문항당 7점

1. 다음 조건을 만족하는 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합)

$$\text{모든 실수 } x, y \text{에 대하여 } x^2 f(x) + y f(y^2) = f(x+y) f(x^2 - xy + y^2)$$

2. 예각삼각형  $ABC$ 의 수심을  $H$ , 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 하자. 선분  $AH$ 를 지름으로 하는 원이 변  $AB, AC$ 와 만나는 점을 각각  $D, E$ , 선분  $AH$ 와  $DE$ 의 교점을  $P$ , 점  $H$ 를 지나고 직선  $AH$ 와 수직인 직선과 선분  $DM$ 의 교점을  $Q$ 라 할 때, 세 점  $P, Q, B$ 가 한 직선 위에 있음을 보여라.

3. 대한수학교등학교에는 남학생  $n$ 명과 여학생  $m$ 명이 있다. 남학생  $B$ 와 서로 알고 지내는 여학생의 수를  $d(B)$ 라고 하고, 여학생  $G$ 와 서로 알고 지내는 남학생의 수를  $d(G)$ 라고 하자. 각 여학생은 서로 알고 지내는 남학생이 적어도 1명 이상 있다고 한다. 이때  $\frac{d(B)}{d(G)} \geq \frac{m}{n}$ 이 되는 서로 알고 지내는 남학생  $B$ 와 여학생  $G$ 가 존재함을 보여라.

4. 다음 조건을 만족하는 서로소인 양의 정수의 순서쌍  $(m, n)$  중  $(41, 12)$ 와 다른 것을 하나 찾아라.

$$m^2 - 5n^2 \text{과 } m^2 + 5n^2 \text{은 모두 완전제곱수이다.}$$

5. 어떤 양의 정수  $n$ 의 경우에는 다음 두 조건을 모두 만족하는  $n$ 개의 서로 다른 양의 정수  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이 존재한다.

$$(1) a_1 = 1, a_n = 2000$$

$$(2) 2 \text{ 이상 } n \text{ 이하인 모든 정수 } i \text{에 대하여 } a_i - a_{i-1} \text{은 } -3 \text{ 또는 } 5 \text{이다.}$$

이런 양의 정수  $n$  중 가장 큰 것을 구하여라.

6. 볼록오각형  $ABCDE$ 가 있다. 사각형  $ABDE$ 는 평행사변형이고 사각형  $BCDE$ 는 한 원에 내접한다. 점  $C$ 를 중심으로 하고  $D$ 를 지나는 원이 직선  $BD, DE$ 와 만나는 점 중  $D$ 가 아닌 점을 각각  $F, G$ 라 할 때, 세 점  $A, F, G$ 는 직선  $\ell$  위에 있다. 직선  $\ell$ 과 선분  $BE$ 의 교점을  $H$ 라 할 때, 다음 조건을 만족하는 원  $\Omega$ 의 모임을 고려하자.

원  $\Omega$ 는 두 점  $A$ 와  $H$ 를 지나고 변  $AB, AE$ 와 각각 점  $A$ 가 아닌 다른 점에서 만난다.

이러한 원  $\Omega$ 와 변  $AB, AE$ 의 교점을 각각  $P(\neq A), Q(\neq A)$ 라 할 때,  $\overline{AP} + \overline{AQ}$ 의 값이 일정함을 보여라.