제 34 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2020년 11월 21일; 제한시간 4시간; 문항당 7점

1. 정수 n은 2000 이하의 서로 다른 양의 정수 짝수 개의 합으로 표현되는 수이다. $1+2+\cdots+2000$ 이하의 양의 정수 중 n의 값이 될 수 없는 것을 모두 구하여라.

2. 예각삼각형 ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$)의 꼭짓각 A의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원 Ω와 만나는 점을 $D(\neq A)$라 하고, 점 D를 지나고 직선 BC와 수직인 직선이 원 Ω와 만나는 점을 $E(\neq D)$라 하자. 점 A가 중심이고 점 E를 지나는 원이 직선 DE와 만나는 점을 $F(\neq E)$라 하고 삼각형 ADF의 외접원의 중심을 K라 할 때, 직선 AK와 BC가 서로 수직임을 보여라.

3. 네 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열하여 만든 문자열 σ에 대하여, $f_{\mathrm{AB}}(\sigma)$를 각 A마다 A의 오른쪽에 있는 B들의 개수의 합으로 정의하자. 같은 방법으로 $f_{\mathrm{BC}}(\sigma)$, $f_{\mathrm{CD}}(\sigma)$, $f_{\mathrm{DA}}(\sigma)$도 정의하자. 예를 들어, 문자열 $\sigma = \mathrm{ACBDBACDCBAD}$이면 $f_{\mathrm{AB}}(\sigma) = 3+1+0 = 4$이고, 같은 방법으로 $f_{\mathrm{BC}}(\sigma) = 4$, $f_{\mathrm{CD}}(\sigma) = 6$, $f_{\mathrm{DA}}(\sigma) = 3$이다. A, B, C, D를 각각 2020개씩 사용하여 만든 문자열 σ에 대하여 $f_{\mathrm{AB}}(\sigma) + f_{\mathrm{BC}}(\sigma) + f_{\mathrm{CD}}(\sigma) + f_{\mathrm{DA}}(\sigma)$의 최댓값을 구하여라.

4. 예각삼각형 ABC ($\overline{AB} > \overline{AC}$)의 꼭짓점 A, B, C에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 점 P가 직선 EF와 BC의 교점이고, 점 Q는 선분 BD 위의 점 중에서 $\angle QFD = \angle EPC$를 만족하는 점이다. 삼각형 ABC의 외심을 O, 수심을 H라 할 때, 직선 OH와 AQ가 서로 수직이면 세 점 P, O, H가 한 직선 위에 있음을 보여라.

5. 실수 a, b, c, d, e가 다음 네 조건을 모두 만족한다.

$$a \le b \le c \le d \le e, \quad a+e=1, \quad b+c+d=3, \quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=14$$

이때 ae의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

6. 어떤 양의 정수 n의 경우에는 다음 두 조건을 모두 만족하는 n개의 서로 다른 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이 존재한다.

(1) $a_1 = 1$, $a_n = 2020$

(2) 2 이상 n 이하인 모든 정수 i에 대하여 $a_i - a_{i-1}$은 -2 또는 3이다.

이런 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.